O całkowaniu

pod postacią skończoną równań różniczkowych liniowych, rzędu n-go.

Przez

A. J. Stodółkiewicza.

(Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. z dnia 4 lipca 1892 r.; referował członek W. Zajączkowski.)

Kształt ogólny równań różniczkowych liniowych jest

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X,$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ są pewne funkcye zmiennej niezależnej x. Ażeby wyprowadzić warunki, pod którymi można znaleźć pierwszą całkę takiego równania, zastosujmy sposób D'Alemberta. Połóżmy nasamprzód

$$(2)\qquad \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}, \frac{dy^{(n-3)}}{dx} = y^{(n-2)}, \ldots, \frac{dy'}{dx} = y'', \frac{dy}{dx} = y',$$

natenczas, równanie (1) można napisać tak:

$$(3)\qquad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = X - X_1 y^{(n-1)} - X_2 y^{(n-2)} - \ldots - X_{n-1} y' - X_n y.$$

Mnożąc równania (2) odpowiednio przez czynniki nieoznaczone $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}$ i dodając do równania (3), mieć będziemy

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} + \mu_1 \frac{dy^{(n-2)}}{dx} + \mu_2 \frac{dy^{(n-3)}}{dx} + \ldots + \mu_{n-2}\frac{dy'}{dx} + \mu_{n-1}\frac{dy}{dx} = \tag{4}$$
$$= X - X_1 y^{(n-1)} - X_2 y^{(n-2)} - \ldots - X_{n-1} y' - X_n y + \mu_1 y^{(n-1)} + \mu_2 y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + \mu_{n-2} y'' + \mu_{n-1} y'.$$

Następnie, połóżmy:

$$y^{(n-1)} + \mu_1 y^{(n-2)} + \mu_2 y^{(n-3)} + \ldots + \mu_{n-2} y' + \mu_{n-1} y = u \tag{5}$$

natenczas, rugując $y^{(n-1)}$ z równania (4) przy pomocy związku (5), otrzymamy

$$\frac{du}{dx} - y^{(n-2)}\frac{d\mu_1}{dx} - y^{(n-3)}\frac{d\mu_2}{dx} - \ldots - y'\frac{d\mu_{n-2}}{dx} - y\frac{d\mu_{n-1}}{dx} = X + (\mu_1 - X_1)u -$$
$$- y^{(n-2)}[\mu_1(\mu_1 - X_1) + X_2 - \mu_2] - y^{(n-3)}[\mu_2(\mu_1 - X_1) + X_3 - \mu_3] - \ldots$$
$$\ldots - y'[\mu_{n-2}(\mu_1 - X_1) + X_{n-1} - \mu_{n-1}] - y[\mu_{n-1}(\mu_1 - X_1) + X_n].$$

Równając w powyższem spółczynniki przy $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, ..., y', y do zera, mieć będziemy jedno równanie na wyznaczenie u:

$$\frac{du}{dx} = X + (\mu_1 - X_1)u \tag{6}$$

skąd wynika:

$$u = e^{\int(\mu_1 - X_1)dx}\left\{c_1 + \int e^{-\int(\mu_1 - X_1)dx} X dx\right\}, \tag{7}$$

tudzież, $n-1$ następujących równań:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dx} &= \mu_1(\mu_1 - X_1) + X_2 - \mu_2, \\ \frac{d\mu_2}{dx} &= \mu_2(\mu_1 - X_1) + X_3 - \mu_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\mu_{n-2}}{dx} &= \mu_{n-2}(\mu_1 - X_1) + X_{n-1} - \mu_{n-1}, \\ \frac{d\mu_{n-1}}{dx} &= \mu_{n-1}(\mu_1 - X_1) + X_n \end{aligned} \tag{8}$$

służących do wyznaczenia μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1}.

Rozwiązanie układu (8) pod postacią skończoną, przy dzisiejszym stanie nauki, należy do zadań niewykonalnych; są jednak szczególne przypadki, godne uwagi, w których znalezienie funkcyi μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1} jest możliwe.

Dajmy na to, że zachodzą następujące związki:

$$\mu_1 = \frac{X_2}{X_1}, \ \mu_2 = \frac{X_3}{X_1}, \ldots, \mu_{n-2} = \frac{X_{n-1}}{X_1}, \ \mu_{n-1} = \frac{X_n}{X_1}. \tag{9}$$

natenczas z równań (8) będziemy mieli

$$\frac{d\mu_1}{dx}=\mu_1^2-\mu_2,$$

$$\frac{d\mu_2}{dx}=\mu_2\mu_1-\mu_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\mu_{n-2}}{dx}=\mu_{n-2}\mu_1-\mu_{n-1},$$

$$\frac{d\mu_{n-1}}{dx}=\mu_{n-1}\mu_1$$

czyli, w skutek związków (9) będzie

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)=\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2=\frac{X_3}{X_1},\\ &\frac{d}{dx}\left(\frac{X_3}{X_1}\right)=\frac{X_3}{X_1}\cdot\frac{X_2}{X_1}-\frac{X_4}{X_1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{d}{dx}\left(\frac{X_{n-1}}{X_1}\right)=\frac{X_{n-1}}{X_1}\cdot\frac{X_2}{X_1}-\frac{X_n}{X_1}\\ &\frac{d}{dx}\left(\frac{X_n}{X_1}\right)=\frac{X_n}{X_1}\cdot\frac{X_2}{X_1}, \end{aligned}$$

Jeżeli równania warunkowe (10) będą się sprawdzać tożsamościowo, natenczas funkcye $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ będziemy mogli wyznaczyć z równań (9). W tym przypadku równanie (5) przedstawi nam pierwszą całkę równania (1). Chcąc znaleźć drugą całkę, należy zastosować podobny sposób do równania (5).

Do równań, czyniących zadość warunkom (10), należy następujące

$$(11)\qquad \frac{d^3y}{dx^3}+X_1\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x^2}\cdot y\right)=X,$$

w którem X_1 i X są jakiekolwiek funkcye zmiennej niezależnej x. Według teoryi wyłożonej, równanie (5) będzie miało w danym przypadku kształt

$$(12)\qquad y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=u,$$

gdzie

$$(13)\qquad u=e^{-\int\left(\frac{2}{x}+X_1\right)dx}\left\{c_1+\int Xe^{\int\left(\frac{2}{x}+X_1\right)dx}dx\right\}.$$

Widzimy dalej, że mamy do scałkowania dwa następujące równania

$$\frac{dy'}{dx}=u+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y,$$
$$\frac{dy}{dx}=y'.$$

Mnożąc drugie z powyższych rownań przez k i dodając do pierwszego, otrzymamy

$$\frac{dy'}{dx}+k\frac{dy}{dx}=u+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y+ky'. \tag{14}$$

Połóżmy następnie

$$y'+ky=v, \tag{15}$$

natenczas z równania (14) będziemy mieli

$$\frac{dv}{dx}-y\frac{dk}{dx}=u+\left(\frac{2}{x}+k\right)(v-ky)-\frac{2}{x^2}y. \tag{16}$$

Celem wyznaczenia k, połóżmy spółczynnik zmiennej y równym zeru, czyli:

$$\frac{dk}{dx}-\frac{2}{x}.k-k^2-\frac{2}{x^2}=0, \tag{17}$$

wówczas funkcyę v znajdziemy z równania

$$\frac{dv}{dx}=u+\left(\frac{2}{x}+k\right)v,$$

z którego wynika

$$v=e^{\int\left(\frac{2}{x}+k\right)dx}\left\{c_2+\int u\,e^{-\int\left(\frac{2}{x}+k\right)dx}dx\right\} \tag{18}$$

Równanie (17), za pomocą podstawienia $k=\frac{1}{t}$, łatwo zamienia się na jednorodne i po scałkowaniu daje

$$k=\frac{2x-2}{2x-x^2}. \tag{19}$$

Nakoniec, całkując ostatnie równanie (15), otrzymamy

$$y=e^{-\int kdx}\left(c_3+\int v e^{\int kdx}dx\right) \tag{20}$$

Celem otrzymania całki ogólnej równania (11) rugujemy v i u z równania (20) przy pomocy związków (13) i (18) tudzież podstawiamy wartość (19) na k. Po wykonaniu łatwych uproszczeń będzie

$$y=(2x-x^2)\left[c_3+\int\frac{x^2}{(2x-x^2)^2}\left\{c_2+\int\frac{2x-x^2}{x^2}e^{-\int\left(\frac{2}{x}+X_1\right)dx}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(c_1+\int Xe^{\int\left(\frac{2}{x}+X_1\right)dx}dx\right)dx\right\}dx\right].$$

Do równań, w ktorych warunki (10) sprawdzają się, należy, między innemi, także następujące równanie 4-go rzędu:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+X_1\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{2}{x}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x^2}y\right)=X,$$

które można scałkować sposobem powyżej wyłożonym.